

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

\mathbb{N} – positive integers

\mathbb{Q} – quotioned

\mathbb{Z} – integers

\mathbb{R} – zbiór liczb rzeczywistych (real)

\mathbb{C} – zbiór liczb zespolonych (complex)

$(a, b]$ – przedział liczb rzeczywistych prawostronnie domknięty

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

KRES GÓRNY (SUPREMUM)

$$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$$

Zbiór A nazywamy **ograniczonym z góry** jeśli istnieje taka liczba rzeczywista C , że

$$\forall a \in A \quad a \leq C$$

Liczbę C nazywamy ograniczeniem górnym zbioru A .

Najmniejsze spośród ograniczeń górnych nazywamy **kresem górnym** zbioru A .

Kres górny nazywamy też **supremum** ($\sup A$)

Jeżeli zbiór A nie jest ograniczony z góry to przyjmujemy $\sup A = +\infty$.

przykłady

$$\sup \mathbb{N} = +\infty$$

$$\sup(0, 1) = 1$$

$$\sup(0, 1] = 1$$

Jeśli $\sup A \in A$ to $\sup A$ nazywamy **maksimum zbioru**.

$$\sup \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1$$

KRES DONY (INFIMUM)

Zbiór niepusty $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z dołu, jeśli istnieje taka liczba $c \in \mathbb{R}$, że $\forall a \in A \ c \leq a$.

Liczbę c nazywamy **ograniczeniem dolnym** zbioru A .

Największe spośród ograniczeń dolnych zbioru A nazywamy **kresem dolnym** zbioru A .

Kres dolny nazywamy także **infimum** ($\inf A$).

Jeżeli A nie jest ograniczone z dołu to przyjmujemy $\inf A = -\infty$.

$$\inf \mathbb{N} = 1$$

$$\inf \mathbb{N}_0 = 0$$

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$$

$A \times B$ - iloczyn karczjański

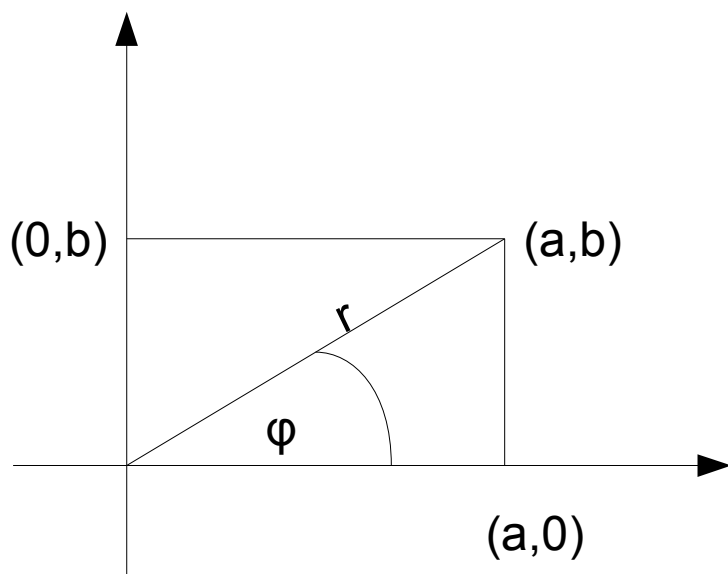
$$A \times B = \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{(a, b)} \\ \text{para uporządkowana} \end{array} : a \in A \wedge b \in B \right\}$$

$i = (0, 1)$ liczba urojona jednostkowa

$(0, b) = b \cdot i$ – liczba urojona

$(a, b) = a + bi$ -liczba zespolona

$$i^2 = -1$$



$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{r}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{r}$$

$$\begin{cases} a = r \cdot \cos \varphi \\ b = r \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$r \geq 0$$

(r, φ) – współrzędne biegunowe punktu (a, b)

r – moduł liczby zespolonej $a + bi$

φ – argument główny liczby zespolonej $a + bi$

$$0! = 1$$

$$n! = (n-1)!n \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n \geq k, \quad n, k \in \mathbb{N}_0$$

^ **symbol Newtona** - liczba zbiorów k -elementowych ze zbioru n -elementowego

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=1}^n a_j$$

$$\sum_{k=1}^n a_j = n \cdot a_j$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=2}^{n-1} a_{k+1}$$

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$$

WZÓR DWUMIENNY NEWTONA

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Stąd:

$$a=b=1 \text{ to } 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Czyli **liczba** wszystkich **podzbiorów** zbioru n-elementowego wynosi 2^n .

ZBIÓR CANTORA

1. Bierzemy przedział domknięty $[0,1]$

2. Z tego przedziału usuwamy odcinek $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$\text{Zostaje: } \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

3. Usuwamy z powyższych dwóch odcinków odcinki środkowe o długości $1/9$.

$$\text{Zostaje: } \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

4. ...

Powstaje zbiór **trójkowy Cantora**.

$$0,1 = 0,9999\dots = \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10^4} + \dots = \frac{9}{100} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots\right) = \frac{9}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{2} = (0,1)_2$$

$$\frac{1}{2} = (0,011111\dots)_2$$

$$\frac{1}{9} = (0,01)_3$$

$$\frac{7}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = (0,21)_3$$

$$\frac{8}{9} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = (0,22)_3$$

Zbiór Cantora to **zbiór** takich **liczb** z przedziału $[0,1]$, które można zapisać w systemie trójkowym **bez** użycia cyfry **1**.

INIEKCJA

Funkcję $f: A \rightarrow B$ nazywamy funkcją różnowartościową lub wzajemnie jednoznaczną lub iniekcją jeśli

$$\forall a_1, a_2 \in A (a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$$

lub w sposób równoważny:

$$\forall a_1, a_2 \in A (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$$

np. $f(x) = x^2$ nie jest iniekcją na \mathbb{R} ale jej zawężenie, np. do zbioru $[0, +\infty)$ jest iniekcją.

suriekcja – na cały zbiór

coś w rodzaju p.d.

Wykład nr 2 i 3 (skąd??) – przeczytać obowiązkowo.