Definicja 1. *Niech dany będzie ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych. Szeregiem o wyrazach a_n nazywamy ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sum częściowych:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{1}$$

Szereg taki oznaczamy $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$. Mówimy, że szereg zbieżny, jeśli istnieje skończona granica S ciągu $(S_n)_{\mathbb{N}}$. Liczbę rzeczywistą S nazywamy sumą szeregu i piszemy $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ (lub $-\infty$) to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny do $+\infty$ (odpowiednio $-\infty$).

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} S_n$ nie istnieje, to szereg taki nazywamy rozbieżnym.

Przykłady

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \quad \text{dla} \quad |q| < 1, \text{bo} \tag{2}$$

$$S_n = q + q^2 + \ldots + q^n \overset{def}{=} q\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q}{1-q} \tag{3}$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} = +\infty \quad \text{bo} \quad S_n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = n \tag{4}$$

Twierdzenie 1 (warunek konieczny zbieżności szeregu)**.** *Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Dowód.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} S - S = 0 \tag{5}$$

□

Twierdzenie 2. *Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to zbieżne są szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n, c \in \mathbb{R}$, oraz:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{8}$$

Definicja 2. *Mówimy, że szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie jeśli zbieżny jest szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Twierdzenie 3. *Każdy szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny.*

Twierdzenie 4 (kryterium porównawcze dla szeregów o wyrazach nieujemnych)**.** *Niech dane będą dwa szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *oraz niech* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *wtedy:*

1. *Ze* <u>*zbieżności*</u> *szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *wynika zbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. *Z* <u>*rozbieżności*</u> *szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *wynik rozbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Twierdzenie 5 (o grupowaniu wyrazów szeregu zbieżnego)**.** *Jeżeli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest szeregiem zbieżnym i jeśli* $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest rozsnącym ciągiem liczb naturalnych, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{l_n} + a_{l_n+1} + a_{l_n+2} + \ldots + a_{l_{n+1}-1}\right)$

Twierdzenie 6 (kryterium d'Alemberta dla szeregów zbieżnych o wyrazach nieujemnych)**.** *Niech dany będzie szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i niech* $a_n > 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy:*

1. *Jeżeli istnieje takie* $p < 1$ *oraz takie* $N \in \mathbb{N}$, *że* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < p$ *dla* $n \geqslant N$ *to* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>*jest zbieżny.*</u>
2. *Jeżeli istnieje takie* $n \in \mathbb{N}$, *że* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ *dla* $n \geqslant N$ *to* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>*jest rozbieżny.*</u>

Dowód.

$$a_{n+1} < pa_n < p^2 a_{n-1} < p^3 a_{n-2} < \ldots < p^{n-N+1} a_N \tag{9}$$

□

<u>Wniosek</u>: Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach dotatnich i jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

to:

1. jeśli $A < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest <u>zbieżny</u>
2. jeśli $A > 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest <u>rozbiezny</u>

<u>Przykłady:</u>

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{3^n} \tag{10}$$

$$\frac{a+1}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2+2(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{n^2+2n}{3^n}} = \frac{(n+1)^2+2(n+1)}{3(n^2+2n)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} \tag{11}$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} \tag{12}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} = \frac{n!(n+1)2^n}{2\cdot 2^n n!} = \tag{13}$$

$$= \frac{n+1}{2} \geqslant 1 \Rightarrow \text{szereg jest rozbieżny} \tag{14}$$

Twierdzenie 7 (kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego dla szeregów o wyrazach nieujemnych)**.** *Niech dany będzie szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i niech* $a_n \geqslant 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$*. Wtedy:*

1. *Jeśli istnieje takie* $p < 1$ *i takie* $N \in \mathbb{N}$*, że* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant p$ *dla* $n \geqslant N$ *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

2. *Jesli* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant p$ *dla nieskończenie wielu n, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Wniosek

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych i jeśli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C$, to:

1. jeśli $C < 1$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

2. jeśli $C > 1$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbiezny.

Przykłady:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

   Mamy $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1} < 1$

   Ponieważ $e^{-1} < 1$ badany ciąg jest zbieżny.

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} e^1>1\Rightarrow \text{szereg rozbieżny}$$

Zauważmy, że tutaj mamy $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\geqslant 1, n\in\mathbb{N}$ a więc nie może być $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}=0$ i dlatego na podstawie warunku koniecznego (tw.1) widzimy, że szereg jest rozbieżny.

Twierdzenie 8 (kryterium porównawcze w wersji granicznej)**.** *Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są szeregami o wyrazach nieujemnych i $b_n>0$ dla $n\in\mathbb{N}$ i jeśli $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=g$ i $g\in(0,+\infty)$ to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są albo **oba zbieżne** albo **oba rozbieżne**.*

Rozpatrywaliśmy dotąd głównie szeregi o wyrazach nieujemnych. Rozpatrzymy teraz szeregi o wyrazach dowolnych rzeczywistych.

Twierdzenie 9 (kryterium Dirichleta)**.** *Jeżeli ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest ograniczony i jeśli ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący i zbieżny do zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.*

Jako wniosek otrzymujemy:

Twierdzenie 10 (kryterium Leibniza dla szeregów naprzemiennych)**.** *Jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący i zbieżny, do zera, to szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ jest zbieżny.*

Przykład: szeregi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}},\alpha>0,\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{-1}{\ln\ n}$$

są zbieżne na podstawie kryterium Leibniza.

Twierdzenie 11.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e \tag{15}$$